

独当一面

1. 2020~2021学年北京西城区北京市第十三中学分校初三上学期期中第1题2分 ★

下列图形是中心对称图形的是（ ）.



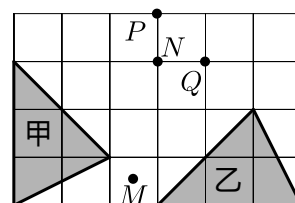
【答案】 D

【解析】 A 选项：不是中心对称图形，
故 A 错误；
B 选项：不是中心对称图形，
故 B 错误；
C 选项：不是中心对称图形，
故 C 错误；
D 选项：是中心对称图形，故
D 正确；
故选 D.

【标注】【知识点】中心对称图形的定义

2. 2020~2021学年上海杨浦区上海市民办杨浦凯慧初级中学初一下学期期中第6题2分 ★★

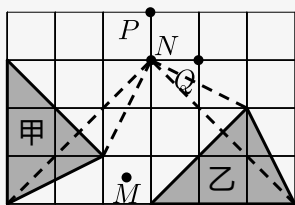
如图，在 6×4 的方格纸中，格点三角形甲经过旋转后得到格点三角形乙，则其旋转中心是（ ）.



- A. 点 M B. 点 N C. 点 P D. 点 Q

【答案】 B

【解析】 两个三角形上的对应点连线的中垂线经过旋转中心.



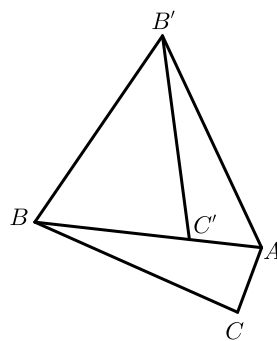
【标注】【知识点】旋转性质综合应用

3.

2020~2021学年广东深圳福田区福田外国语学校初二下学期单元测试《图形的平移、旋转与因式分解》第13题3分

★★

如图， $\triangle ABC$ ， $AC = 2$ ， $AB = 6$ ， $\triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转得到，点 C' 是在AB上，则 $BC =$ _____.



【答案】 4

【解析】 $\because \triangle AB'C'$ 是 $\triangle ABC$ 绕点A逆时针旋转得到，点 C' 是在AB上，

$$\therefore AC' = AC = 2,$$

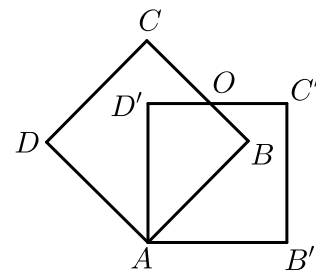
$$\therefore BC' = AB - AC' = 6 - 2 = 4.$$

故答案为：4.

【标注】【知识点】旋转的性质

4. 2019~2020学年四川成都高新区电子科技大学实验中学初二下学期期中第8题3分 ★★★

如图，把边长为3的正方形ABCD绕点A顺时针旋转 45° 得到正方形 $AB'C'D'$ ，边BC与 $D'C'$ 交于点O，则四边形ABOD'的周长是（ ）.



A. $6\sqrt{2}$

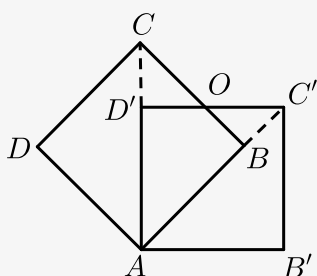
B. 6

C. $3\sqrt{2}$

D. $3 + 3\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 如图所示，连接 AC ， AC' ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，边长为 3，

$\therefore \angle BAC = \angle B'AC' = 45^\circ$ ， $AC = AC' = \sqrt{2}AB = 3\sqrt{2}$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转 45° 得到正方形 $AB'C'D'$ ，

$\therefore \angle BAD' = 45^\circ$ ，

$\therefore$ 点 D' 在线段 AC 上， $CD' = AC - AD' = 3\sqrt{2} - 3$ ，

$\therefore \angle CD'O = \angle AD'O = 90^\circ$ ，

$\triangle CD'O$ 为等腰直角三角形，

$D'O = CD' = 3\sqrt{2} - 3$ ， $CO = \sqrt{2}D'O = \sqrt{2}(3\sqrt{2} - 3) = 6 - 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore BO = BC - CO = 3 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 3$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABOD'$ 的周长

$= AB + BO + D'O + AD'$

$= 3 + 3\sqrt{2} - 3 + 3\sqrt{2} - 3 + 3$

$= 6\sqrt{2}$ ，

故选：A．

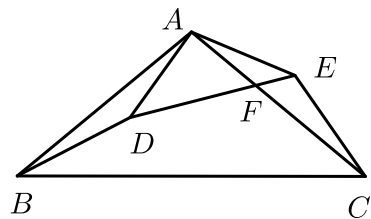
【标注】 【知识点】正方形的性质

【知识点】旋转的性质

【知识点】旋转性质综合应用

【能力】推理论证能力

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC = 6$ ，点 D 为 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle BAD = 15^\circ$ ， $AD = 3$ ，连接 BD ，将 $\triangle ABD$ 绕点 A 按逆时针方向旋转，使 AB 与 AC 重合，点 D 的对应点为点 E ，连接 DE 交 AC 于点 F ，则 AF 的长为（ ）。



A. $\sqrt{3}$

B. $\sqrt{6}$

C. 3

D. $3\sqrt{2}$

【答案】 B

【解析】 由旋转知 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ ，

故 $AD = AE = 3$ ， $\angle BAD = \angle CAE = 15^\circ$ ，

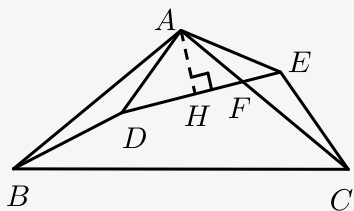
$\angle DAF = 90^\circ - \angle BAD = 75^\circ$ ，

$\therefore \angle DAE = \angle DAF + \angle CAE = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle ADE = 45^\circ$ ， $\angle AFD = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$ ，

作 $AH \perp DF$ 于 H ，



在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中， $AH = AD \sin 45^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，

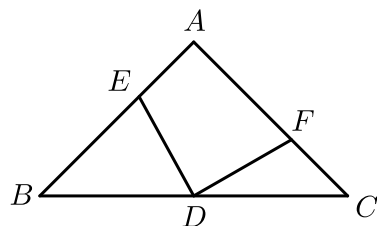
在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中， $AF = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = \sqrt{6}$ 。

故选 B。

【标注】 【知识点】解直角三角形的综合应用

6. ★★★★★

如图，在等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， D 为 BC 中点， $DE \perp DF$ ，若 $BC = 4$ ，则四边形 $AEDF$ 的面积为 _____。

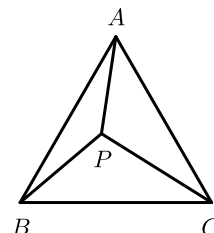


【答案】 2

【标注】【知识点】旋转型全等

7. 2020~2021学年甘肃兰州城关区中国科学院兰州分院中学初二下学期期中第12题3分 ★★★

如图，等边三角形 ABC 内有一点 P ，分别连结 AP 、 BP 、 CP ，若 $AP = 6$ ， $BP = 8$ ， $CP = 10$ ．
则 $S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BPC} = (\quad)$ ．



A. $20 + 16\sqrt{3}$

B. $24 + 12\sqrt{3}$

C. $20 + 12\sqrt{3}$

D. $24 + 16\sqrt{3}$

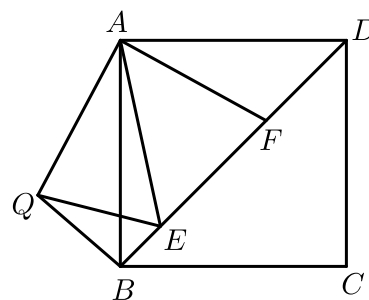
【答案】 暂无

【解析】 暂无

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

8. 2020~2021学年广东广州白云区华南师范大学附属太和实验学校初三上学期期中第22题8分 ★★★

如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 是对角线 BD 上两点，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后，得到 $\triangle ABQ$ ，连接 EQ ，求证：



(1) EA 是 $\angle QED$ 的平分线．

(2) $EF^2 = BE^2 + DF^2$ ．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) 证明见解析．

【解析】 (1) $\because$ 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 后，得 $\triangle ABQ$ ，

$\therefore QB = DF$ ， $AQ = AF$ ， $\angle BAQ = \angle DAF$ ，

$\because \angle EAF = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAF + \angle BAE = \angle BAQ + \angle BAE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle QAE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle QAE = \angle FAE ,$$

在 $\triangle AQE$ 和 $\triangle AFE$ 中 ,

$$\begin{cases} AQ = AF \\ \angle QAE = \angle FAE , \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AQE \cong \triangle AFE \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore \angle AEQ = \angle AEF ,$$

$\therefore EA$ 是 $\angle QED$ 的平分线 .

(2) 由(1)得 $\triangle AQE \cong \triangle AFE$,

$$\therefore QE = EF ,$$

由旋转知 $\angle ADF = \angle ABQ$, $QB = DF$,

$$\text{又 } \angle ABD + \angle ADF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ABQ = 90^\circ ,$$

$$\text{即 } \angle QBE = 90^\circ ,$$

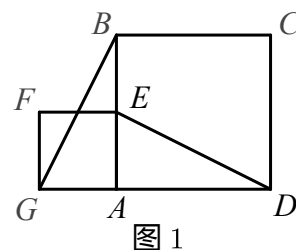
$$\text{在 Rt}\triangle QBE \text{ 中 , } QB^2 + BE^2 = QE^2 ,$$

$$\text{则 } EF^2 = BE^2 + DF^2 .$$

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

9. 2020~2021学年河南郑州金水区河南省实验中学初一下学期期中第23题11分 ★★★★★

如图 1 , 四边形 $ABCD$ 是正方形 , 在 E 是 AB 边的中点 , 以 AE 为边作正方形 $AEFG$, 连接 DE , BG



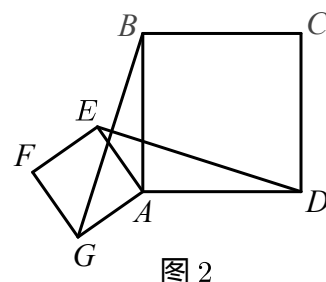
(1) 发现

① 线段 DE 、 BG 之间的数量关系是 _____ .

② 直线 DE 、 BG 之间的位置关系是 _____ .

(2) 探究

如图 2 , 将正方形 $AEFG$ 绕点 A 逆时针旋转 , (1) 中的结论是否仍然成立 ? 若成立 , 请给出证明 , 若不成立 , 请说明理由 .



(3) 应用

在 (2) 下, 将正方形 $AEFG$ 绕点 A 是逆时针旋转一周, 记 DE 的中点为 P , 连接 AP , 若 $AB = 4$, 请直接写出 AP 的取值范围 .

【答案】 (1) ① $DE = BG$

② $DE \perp BG$

(2) 成立, 证明见解析 .

(3) $1 \leq AP \leq 3$.

【解析】 (1) ① $\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEFG$,

$\therefore AB = AD$, $AG = AE$, $\angle BAG = \angle DAE = 90^\circ$,

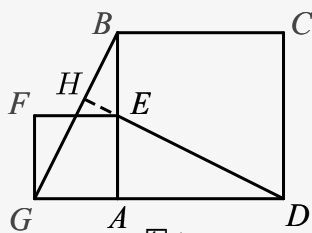
$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAG = \angle DAE \\ AG = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADE$ (SAS) ,

$\therefore BG = DE$.

② 如图 1 所示, 延长 DE 交 BG 于点 H ,



$\therefore$ 由①知, $\triangle ABG \cong \triangle ADE$,

$\therefore \angle EBH = \angle ADE$,

又 $\because \angle BEH = \angle DEA$,

$\therefore \angle EBH + \angle BEH = \angle ADE + \angle DEA$,

$\therefore \angle BHE = \angle DAE = 90^\circ$,

故 $DH \perp BG$, 即: $DE \perp BG$.

(2) 成立, 理由如下, 如图 2 所示, 设 DE 与 BG 交于点 O , DE 与 AB 交于点 N ,

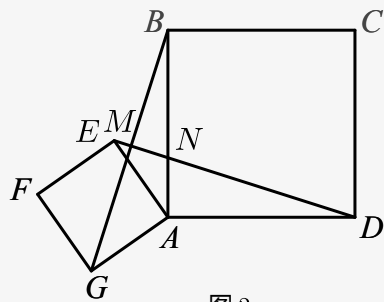


图 2

$\because$ 正方形 $ABCD$ 和正方形 $AEGF$,

$\therefore AB = AD$, $AG = AE$, $\angle BAD = \angle EAG = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle BAE = \angle EAG + \angle BAE$,

即 : $\angle BAG = \angle DAE$,

$\therefore$ 在 $\triangle ABG$ 的 $\triangle ADE$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAG = \angle DAE , \\ AG = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADE$ (SAS) ,

$\therefore DE = BG$, $\angle NBM = \angle ADN$,

又 $\because \angle BNM = \angle DNA$,

$\therefore \angle NBM + \angle BNM = \angle ADN + \angle DNA$,

$\therefore \angle BMN = \angle DAN = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp BG$.

(3) 如图 3 所示 , 取 AD 中点为点 M , 连接 MP ,

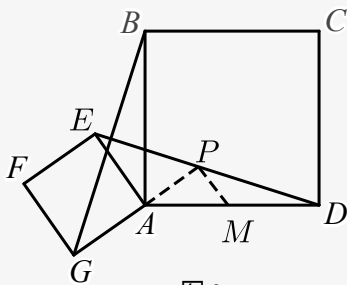


图 3

$\because$ 由题可得 : $AE = \frac{1}{2}AB = 2$, $AB = AD = 4$,

$\therefore AM = \frac{1}{2}AD = 2$,

又 $\because$ 点 P 为 DE 中点 , 点 M 为 AD 中点 ,

$\therefore PM = \frac{1}{2}AE = 1$,

由题可得 : $AP \leq AM + PM$, $AP \geq AM - PM$,

$\therefore$ 当正方形 $AEGF$ 绕点 A 逆时针旋转一周时 , AP 的最大值为 :

$AM + PM = 2 + 1 = 3$,

AP 的最小值为 : $AM - PM = 2 - 1 = 1$,

$\therefore AP$ 的取值范围为 : $1 \leq AP \leq 3$.

【标注】【知识点】利用三边关系求最值

10. 2020~2021学年四川成都锦江区成都七中育才学校初二上学期期中第28题12分 ★★★★★

在平面直角坐标系中，点 A 、 B 分别在 x 轴、 y 轴上， $OA = 3$ ， $\angle BAO = 60^\circ$ 。

- (1) 如图 1，将 $\triangle ABO$ 绕点 O 逆时针旋转得到 $\triangle CDO$ ，点 A 、 B 的对应点分别是点 C 、 D ，当点 C 刚好落在线段 AB 上时，求点 D 的坐标。

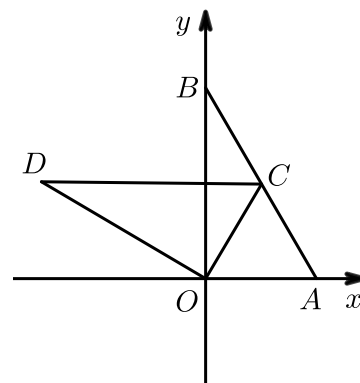


图1

- (2) 将 $\triangle COD$ 继续逆时针旋转至图 2 位置，使点 C 、 D 分别落在第二、三象限，连接 BC 、 AD ，求证： $S_{\triangle BCO} = S_{\triangle AOD}$ 。

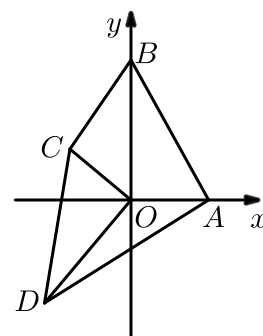


图2

- (3) 将 $\triangle COD$ 继续逆时针旋转至图 3 位置，使点 C 、 D 分别落在第三、四象限，且 $\angle AOD = 30^\circ$ ，试在 y 轴上找一点 P ，使 $\triangle COP$ 的面积与 $\triangle AOD$ 的面积相等，请直接写出点 P 的坐标以及 $\triangle COP$ 中 CP 边上的高的长度。

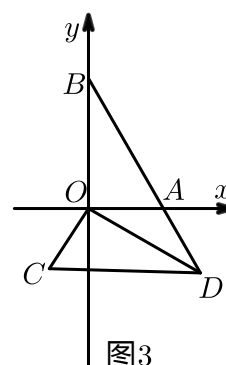


图3

【答案】(1) $D\left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 。

(2) 证明见解析.

(3) $P_1(0, 3\sqrt{3})$, $d_1 = \frac{3\sqrt{21}}{14}$; $P_2(0, -3\sqrt{3})$, $d_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【解析】(1)

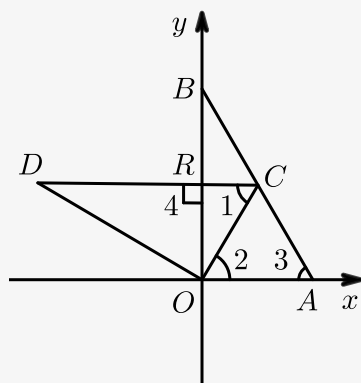


图1

$$OB = \sqrt{3}OA = 3\sqrt{3}, AB = 2OA = 6,$$

$$\because OC = OA, \angle 3 = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle OCA \text{ 为正 } \triangle OCA,$$

$$\therefore \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\because \angle 1 = \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore DC \parallel OA, \angle 4 = \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\because \angle D = 30^\circ, \angle 4 = 90^\circ,$$

$$\therefore RO = \frac{1}{2}DO = \frac{3}{2}\sqrt{3}, DR = \sqrt{3}RO = \frac{9}{2},$$

$$\because D \text{ 在第二象限},$$

$$\therefore D\left(-\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).$$

(2)

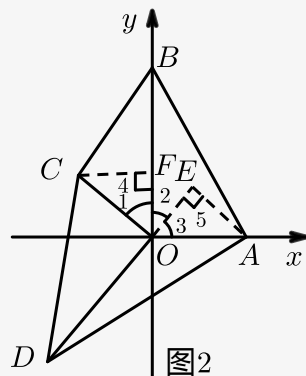


图2

$$\because \text{旋转},$$

$$\therefore CO = OA, BO = DO, \angle 1 = 90^\circ - \angle 2 = \angle 3,$$

$$\text{在 } \triangle COF \text{ 与 } \triangle AOE \text{ 中},$$

$$\because \begin{cases} \angle 4 = \angle 5 = 90^\circ \\ \angle 1 = \angle 3 \\ CO = OA \end{cases},$$

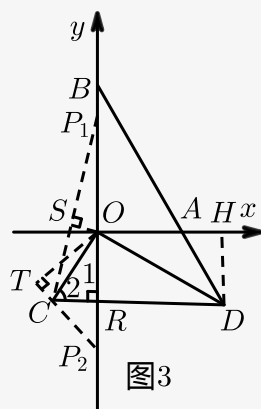
$$\therefore \triangle COF \cong \triangle AOE (\text{AAS}),$$

$$\therefore CF = AE,$$

$$\therefore \frac{CF \cdot BO}{2} = \frac{DO \cdot AE}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BCO} = S_{\triangle AOD}.$$

(3) 过 D 作 $DH \perp x$ 轴于 H ,



$$\because \angle HOD = 30^\circ, \angle OHD = 90^\circ,$$

$$\therefore HD = \frac{1}{2}OD = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAD} &= \frac{1}{2}OA \cdot DH \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{4}, \end{aligned}$$

$$\because \angle HOD = \angle ODC = 30^\circ,$$

$$\therefore OH \parallel CD, CD \perp y\text{轴}, \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle 2 = 60^\circ,$$

$$\therefore CR = \frac{1}{2}OC = \frac{3}{2}, OR = \sqrt{3}CR = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

又 C 在第三象限,

$$\therefore C\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right),$$

设 $P(0, b)$,

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle POC} &= \frac{1}{2}CR \cdot OP \\ &= \frac{1}{2}|x_C| \cdot |b| \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}|b|, \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}|b| = \frac{9\sqrt{3}}{4},$$

$$|b| = 3\sqrt{3},$$

$$b = \pm 3\sqrt{3},$$

$$P_1(0, 3\sqrt{3}), P_2(0, -3\sqrt{3}),$$

过 O 作 $OS \perp CP_1$ 于 S , 作 $OT \perp CP_2$ 于 T ,

$$P_1C = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{6\sqrt{7}}{2},$$

$$P_2C = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle CP_1O} = \frac{1}{2}P_1C \cdot OS,$$

$$\begin{aligned}\therefore OS &= \frac{2S_{\triangle CP_1O}}{P_1C} \\ &= \frac{2 \times \frac{9\sqrt{3}}{4}}{6\sqrt{7}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{21}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理 } OT &= \frac{2S_{\triangle CP_2O}}{P_2C} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$\text{综上, } P_1(0, 3\sqrt{3}), d_1 = \frac{3\sqrt{21}}{14}; P_2(0, -3\sqrt{3}), d_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角